МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ, МОДЕЛІ ТА ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ В ЕКОНОМІЦІ

УДК 369.04:519.863

Юрченко М.Є., к. ф.-м. н., доцент,
доцент кафедри інформаційних систем в економіці
Чернігівський національний технологічний університет

ЗНАХОДЖЕННЯ ЙМОВІРНОСТІ БАНКРУТСТВА СТРАХОВОЇ КОМПАНІЇ ЗА СТОХАСТИЧНИХ СТРАХОВИХ ВИПЛАТ

Юрченко М.Є. Знаходження ймовірності банкрутства страхової компанії за стохастичних страхових виплат. Для сучасної страхової компанії ризик банкрутства є випадковою величиною, визначення характеристик якої дає змогу здійснити прогноз функціонування компанії. У статті представлено математичну модель роботи страхової компанії у разі стохастичного потоку страхових виплат. Розглянуто потенційні переваги наданої моделі порівняно з класичною. Отримано аналітичний вираз для знаходження ймовірності банкрутства за певних допущень про вхідні параметри.

Ключові слова: страхова компанія, страхові ризики, ймовірність, банкрутство, стохастичні моделі.

Юрченко М.Е. Нахождение вероятности банкротства страховой компании при стохастических страховых выплатах. Для современной страховой компании риск банкротства является случайной величиной, определение характеристик которой позволяет осуществить прогноз функционирования компании. В статье представлена математическая модель работы страховой компании в случае стохастического потока страховых выплат. Рассмотрены потенциальные преимущества приведенной модели по сравнению с классической. Получено аналитическое выражение для нахождения вероятности банкротства при некоторых допущениях о входных параметрах.

Ключевые слова: страховая компания, страховые риски, вероятность, банкротство, стохастические модели.

Iurchenko M.E. Finding the probability of bankruptcy of an insurance company with stochastic insurance payments. For a modern insurance company, the risk of bankruptcy is a random variable, the definition of characteristics of which allows carrying out the forecast of the company's functioning. The article presents a mathematical model of the insurance company's work in the case of a stochastic flow of insurance payments. Potential advantages of the presented model with respect to the classical one are considered. An analytical expression for finding the probability of bankruptcy under certain assumptions about input parameters is obtained.

Key words: insurance company, insurance risks, probability, bankruptcy, stochastic models.

Постановка проблеми. Як відомо, під час моделювання роботи страхової компанії в класичній постановці передбачається, що швидкість надходження грошових коштів α та інтенсивність потоку страхових виплат λ не залежать від часу. Однак ці характеристики можуть змінюватися, наприклад, внаслідок сезонних коливань, тому практичний інтерес представляє динамічний випадковий процес, відмінною рисою якого є стрибкоподібні зміни інтенсивності потоку виплат у випадкові моменти часу. Важливою задачею щодо такого процесу є знаходження ймовірності банкрутства страхової компанії і математичного сподівання часу до такого занепаду. Під час побудови математичної моделі будемо припускати, що даний випадковий процес є стохастичним зі змінною інтенсивністю $\lambda(\tau)$.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. У публікаціях, присвячених вивченню класичної моделі, переважно досліджуються ймовірності банкрутства і виживання страхової компанії та принципи вибору навантаження страхової премії (навантаження безпеки). Серед наукових праць останнього часу відзначимо роботи В.М. Маліновського, Т. Мака та А.І. Зейфмана [1-3], в яких розглядається ймовірність банкрутства на кінцевому інтервалі та визначається ймовірність фінансового занепаду за малого навантаження страхової премії. Це питання розглянуто й у роботі Т. Рольські, Г. Шміділі та В. Шмідта [4], де автори досліджують прості апроксимації ймовірності банкрутства. У роботах низки авторів [5-7] розглядаються можливості побудови верхніх і нижніх меж для ймовірності банкрутства. Слід зазначити, що в значній кількості робіт розглядаються більш складні узагальнення класичної моделі. В рамках цих досліджень процес надходження страхових премій у компанії також вважається випадковим процесом, а сама страхова компанія розглядається як деяка система масового обслуговування.

Необхідно зазначити, що отримання саме аналітичного виразу для знаходження ймовірності банкрутства страхової компанії залишається важливим завданням.

Постановка завдання. Важливою задачею актуарної математики є знаходження ймовірності банкрутства страхової компанії. Складність поставленої задачі полягає у знаходженні аналітичного розв'язку системи інтегро-диференційних рівнянь, з яких і визначається вищезгадана ймовірність. Метою дослідження є знаходження аналітичних виразів основних характеристик функціонування страхової компанії, якщо потік страхових виплат є стохастичним пуассонівським потоком зі змінною інтенсивністю.

Виклад основних результатів. Припускаємо, що потік страхових виплат являє собою стрибкоподібний однорідний ланцюг Маркова з неперервним часом $\lambda = \{\lambda(\tau), \tau \geq 0\}$ і n станами: $\lambda(\tau) = \lambda_i$, $1 \leq i \leq n$. З огляду на те, що перехід зі стану в стан описується інфінітезимальною матрицею $V = [V_{ij}]$, то ймовірність переходу зі стану i в стан j за проміжок часу $\Delta\tau$ дорівнює:

$$p_{ij}(\Delta\tau)=V_{ij}\Delta\tau+o(\Delta\tau), \quad i\neq j$$

$$p_{ij}(\Delta\tau)= 1+V_{ij}\Delta\tau+o(\Delta\tau), \quad i=1,2,\ldots,n,$$

$$\sum_{j=1}^{n} V_{ij} = 0,$$

де $V_{ij} \geq 0$ для $i = j$.

Як показано в [4, с. 101], існують граничні ймовірності

$$p_i = \lim_{\tau\to\infty} p_{ij}(\tau),$$

які при цьому є розв'язками системи алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{j=1}^{n} V_{ij} p_i = 0,$$

$$\sum_{j=1}^{n} p_j = 1.$$

У разі встановлення стаціонарного режиму позначимо інтенсивність потоку страхових виплат λ_c, причому

$$\lambda_c = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j p_j.$$

Нехай страхові виплати є незалежними випадковими величинами, що мають щільність розподілу $f(x)$,математичне сподівання $M = a$, і моменти $M[x_\mu] = a_\mu$. Припускаємо, що, як і у класичній моделі, страхові премії надходять безперервно в часі з деякою постійною швидкістю β і збільшенням капіталу страхової компанії за рахунок страхової премії $\beta\Delta\tau$ за час $\Delta\tau$.

Позначимо $K(\tau)$ – капітал компанії в момент часу τ. Зміну капіталу $\Delta K(\tau)$ за час $\Delta\tau$ з інтенсивністю $\lambda(\tau) = \lambda\tau$ може бути визначено зі співвідношення:

$$\Delta K(\tau)=K(\tau+\Delta\tau) - K(\tau)=$$

$$= \begin{cases} \beta\Delta\tau, & з\ ймовірністю\ 1-\lambda_\tau\Delta\tau+\delta(\Delta\tau) \\ \beta\Delta\tau - x, & з\ ймовірністю\ \lambda_\tau\Delta\tau f(x)dx+\delta(\Delta\tau) \end{cases}, \quad (1)$$

де x – випадкові страхові виплати за період $\Delta\tau$.

Переходячи в (1) до границі за $\Delta\tau \to 0$, отримуємо співвідношення, що визначає зміну середнього капіталу страхової компанії $\bar{K}(\tau)$:

$$\bar{K}(\tau) = \beta - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i p_i(\tau)a, \quad (2)$$

де α – математичне сподівання.

Розв'язуючи рівняння, отримуємо:

$$\bar{K}(\tau) = K(0) + (\beta - \lambda_c a)\tau + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a \int_0^t (p_i - P_i(y))dy. \quad (3)$$

З виразу (3) випливає, що якщо $\tau > 1$, то капітал компанії монотонно зростає, за $\beta = (1+\gamma)\lambda_c a$, де $\gamma > 0$ – навантаження страхової премії. За $\gamma < 0$ компанія зазнає банкрутства.

Нехай $p_i(k)=P$, $\psi_i(k) = Q$ – відповідно ймовірності банкрутства та виживання страхової компанії за умови, що в початковий момент часу її капітал дорівнює k при $\lambda=\lambda_\tau$.

Нехай далі вважаємо, що ймовірності банкрутства та виживання страхової компанії дорівнюють

$$\psi(k) = \sum_{i=1}^{n} v_i \psi_i(k),$$

$$p(k) = \sum_{i=1}^{n} v_i p_i(k),$$

Розглянемо два сусідніх моменти часу τ та $\tau + \Delta\tau$. Важаемо, що в момент часу τ інтенсивність виплат $\lambda = \lambda_\tau$ і капітал страхової компанії дорівнює $K - \alpha\Delta\tau$.

Далі отримаємо інтегро-диференційні рівняння для знаходження імовірності банкрутства страхової компанії. З урахуванням формули повної ймовірності отримуємо такий вираз:

$$\psi_i(k - \alpha\Delta\tau) = (1 - \lambda_i\Delta\tau)\psi_i(k) + \lambda_i\Delta\tau \int_0^k \psi_i(k-x)f(x)dx +$$
$$+\sum_{j=1}^{n} v_{ij}\psi_j(k)\Delta\tau + o(\Delta\tau)$$

Після деяких перетворень, переходячи до границі за $\Delta\tau \to 0$, отримуємо таку систему рівнянь:

$$\alpha\psi_i(k) = \lambda_i\psi_i(k) - \sum_{j=1}^{n} \upsilon_{ij}\psi_j(k) - \lambda_i \int_0^k \psi_i(k-x)f(x)dx \quad (4)$$

$$\lim_{k\to\infty} \psi_i(k) = 1.$$

Рівняння для ймовірності банкрутства має відповідно вигляд:

$$\alpha p_i(k) =$$

$$= \lambda_i p_i(k) - \sum_{j=1}^{n} v_{ij} p_j(k) - \lambda_i \int_0^s p_i(k-x)f(x)dx - -\lambda_i \int_k^\infty f(x)dx, \quad (5)$$

$$\lim_{k\to\infty} p_i(k) = 0.$$

Застосовуючи перетворення Лапласа до системи рівнянь (5), отримуємо систему рівнянь відносно $F_j(\theta)$:

$$\sum_{j=1}^{n} v_{ij} F_j(\theta) + \theta\left(\left(\alpha - \lambda_i T(\theta)\right) F_i(\theta) = \alpha\psi_i(0), \qquad (6)$$

де

$$F_i(\theta) = \int_0^\infty \psi_i(k) e^{-\theta k} d\theta,$$

$$Z(\theta) = \int_0^\infty f(k) e^{-\theta k} d\theta,$$

$$T(\theta) = \frac{1 - Z(\theta)}{\theta}.$$

З урахуванням (3) отримуємо такий вираз:

$$\alpha\psi(0) = \sum_{i=1}^{n} v_i \left(\alpha - \lambda_i T(0)\right)\theta F_i(\theta). \qquad (7)$$

Переходячи у виразі (7) до границі при $\theta \to \infty$, отримуємо:

$$\psi(0) = \frac{\alpha - \lambda_c a}{\alpha} = \frac{\gamma}{1+\gamma}, \qquad (8)$$

де a – відповідно математичне сподівання страхових виплат з урахуванням умови:

$$Z(0) = a$$

З (8) випливає, що у отриманої нами моделі, як і в класичної моделі, ймовірність виживання страхової компанії залежить лише від навантаження страхової премії γ. Точний розв'язок отриманої системи рівнянь можливо знайти, коли страхове навантаження $\gamma << 1$. У цьому разі розв'язок отриманої системи рівнянь можливо шукати у вигляді:

$$p_i(k) = \frac{1}{1+\gamma} f_i(t, \gamma). \qquad (9)$$

Після підстановки (9) у систему рівнянь (4) отримуємо:

$$\alpha\theta\psi_i(z;\gamma) = \lambda_i\psi_i(z;\gamma) - \sum_{j=1}^{n} v_{ij} f_j(z;\gamma) - \\ - \lambda_i \int_0^{\frac{z}{\gamma}} f_i(z - \gamma_x;\gamma) f(x) dx - \lambda_i (1+\gamma) \int_{\frac{z}{\gamma}}^{\infty} f(x) dx. \qquad (10)$$

Розв'язок рівняння (10) можливо надати у такому вигляді:

$$\psi_i(z;\gamma) = \psi(z) + A_i(z)\gamma + M_i(z)\gamma^2 + N_i(z)\gamma^3 \qquad (11)$$

Підставляючи (11) в рівняння (10), отримуємо:

$$p_i(k) = \frac{1}{1+\gamma}\left(e^{-b_1\gamma} + \gamma\left(T_1 e^{-b_1\gamma} + \gamma T_2 e^{-b_1\gamma}\right)\right), \qquad (12)$$

де $b_1, T_1, T_2 - const$.

Висновки. Таким чином, з урахуванням стохастичного характеру страхових виплат на відміну від класичної моделі отримано аналітичний розв'язок системи інтегро-диференційних рівнянь, який визначає ймовірності банкрутства страхової компанії. Під час розв'язку було зроблено припущення про те, що навантаження страхової премії є малою величиною.

Список літератури:

1. Malinovskii V.K. Zone-adaptive control strategy for a multiperiodic model of risk. Annals of Actuarial Science. – 2007. – Vol. 2. – № II. – P. 349-367.
2. Мак Т. Элементы страхового риск-менеджмента. Москва: Олимп Бизнес, 2012. – 11 с.
3. Zelfman A.I. Ergodicity bounds for birth-death processes with particularities. AIP Conference Proceedings. – 2016. – 1736. – P. 220-226.
4. Rolski T., Schmidli H., Schmidt V., Teugels J. Stochastic Processes for Insurance and Finance. Wiley Series in Probability and Statistics. John Wiley & Sons, 2009.
5. Ballotta L., Haberman S., Wang N. Guaran tees in With-Profit and Unitized With-Profit Life Insurance Contracts: Fair Valuation Problem in Presence of the Default Option. Journal of Risk and Insurance. – 2016. – № 73 (1). – P. 97-121.
6. Dionne G.б Rothschild C.G. Economic effects of risk classification bans. Geneva Risk Insur. Rev. – 2014. – № 39. – P. 184-22.
7. Юрченко М.Є. Модель некомерційних фондів соціального страхування з експоненційним розподілом витрат. Інвестиції: практика та досвід. – 2014. – № 21. – С. 136-138.